

Шәкір Айдос 

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

e-mail: ajdossakir@gmail.com

14-лекция. Метод Ритца для задачи Дирихле

Цель лекции – сформировать у студентов понимание вариационного подхода к решению краевых задач (в частности, задачи Дирихле) и освоить метод Ритца как способ приближённого нахождения решений через минимизацию функционалов энергии.

План лекции:

1. Метод Ритца для задачи Дирихле
2. Контрольные вопросы
3. Список литературы

1 Метод Ритца для задачи Дирихле

Будем искать решение уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0 \quad \text{при } (x, y) \in G \quad (1.1)$$

и

$$u|_{\Gamma} = f(x, y), \quad (1.2)$$

где Γ – простой замкнутый контур, ограничивающий конечную область G , а функция $f(x, y)$ непрерывна на Γ . Согласно лекции 13 эта краевая задача эквивалентна вариационной задаче для функционала

$$F[y] = \iint_G \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (1.3)$$

в классе функций, имеющих непрерывные частные производные до второго порядка включительно в замкнутой области $G + \Gamma$ и удовлетворяющих на границе Γ краевому условию (1.2). Построим конечную систему линейно независимых функций (координатные функции)

$$u_0(x, y), u_1(x, y), \dots, u_n(x, y) \in C^{(2)}(G + \Gamma)$$

Пример. Найти функцию $u = u(x, y)$, гармоническую в области $G : x > 0, y > 0, x + y < 1$ и удовлетворяющую на границе $\Gamma : x = 0, y = 0, x + y = 1$ (рисунок 1) условию

$$u|_{\Gamma} = x^2 + y^2. \quad (1.10)$$

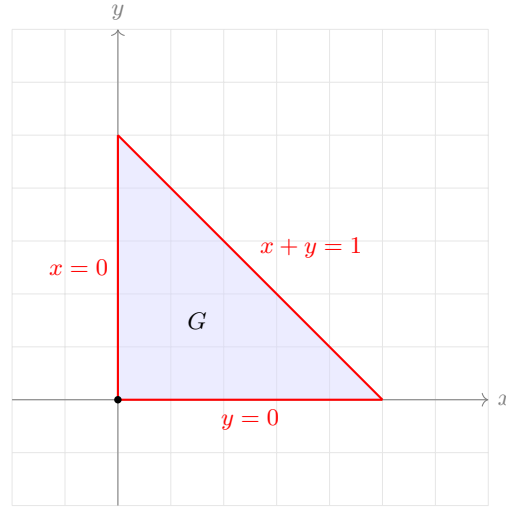


Рисунок 1

Решение. Выберем следующую систему координатных функций:

$$u_0(x, y) = x^2 + y^2, \quad u_1(x, y) = xy(1 - x - y),$$

$$u_2(x, y) = x^2y(1 - x - y), \quad u_3(x, y) = xy^2(1 - x - y)$$

и составим линейную комбинацию

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 + c_1xy(1 - x - y) + c_2x^2y(1 - x - y) + c_3xy^2(1 - x - y). \quad (1.11)$$

Легко проверить, что функция $\varphi(x, y)$ удовлетворяет краевому условию (1.10) при любых значениях постоянных c_1, c_2, c_3 . Для составления системы (1.8) подсчитываем коэффициенты при неизвестных c_1, c_2, c_3 и свободные члены

$$[u_0, u_1] = [u_1, u_0] = \iint_G [2x(y - 2xy - y^2) + 2y(x - x^2 - 2xy)] dx dy,$$

$$[u_0, u_2] = [u_2, u_0] = \iint_G [2x(2xy - 3x^2y - 2xy^2) + 2y(x^2 - x^3 - 2x^2y)] dx dy,$$

$$[u_0, u_3] = [u_3, u_0] = \iint_G [2x(y^2 - 2xy^2 - y^3) + 2y(2xy - 2x^2y - 3xy^2)] dx dy,$$

$$[u_1, u_1] = \iint_G [(y - 2xy - y^2)^2 + (x - x^2 - 2xy)^2] dx dy,$$

$$[u_1, u_2] = [u_2, u_1] = \iint_G [(y - 2xy - y^2)(2xy - 3x^2y - 2xy^2) + (x - x^2 - 2xy)(x^2 - x^3 - 2x^2y)] dx dy,$$

$$[u_1, u_3] = [u_3, u_1] = \iint_G [(y - 2xy - y^2)(y^2 - 2xy^2 - y^3) + (x - x^2 - 2xy)(2xy - 2x^2y - 3xy^2)] dx dy,$$

$$[u_2, u_2] = \iint_G [(2xy - 3x^2y - 2xy^2)^2 + (x^2 - x^3 - 2x^2y)^2] dx dy,$$

$$[u_2, u_3] = [u_3, u_2] = \iint_G [(2xy - 3x^2y - 2xy^2)(y^2 - 2xy^2 - y^3) + (x^2 - x^3 - 2x^2y)(2xy - 2x^2y - 3xy^2)] dx dy,$$

$$[u_3, u_3] = \iint_G [(y^2 - 2xy^2 - y^3)^2 + (2xy - 2x^2y - 3xy^2)^2] dx dy.$$

Результаты вычислений приведены в таблице 1.

Таблица 1: Значения коэффициентов при неизвестных

i	$[u_0, u_i]$	$[u_1, u_i]$	$[u_2, u_i]$	$[u_3, u_i]$
1	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{252}$	$\frac{1}{252}$
2	$-\frac{1}{90}$	$\frac{1}{252}$	$\frac{3}{1120}$	$\frac{1}{70}$
3	$-\frac{1}{90}$	$\frac{1}{252}$	$\frac{1}{70}$	$\frac{3}{1120}$

Отсюда линейная система для определения коэффициентов запишется в виде

$$\begin{cases} \frac{1}{90} c_1 + \frac{1}{252} c_2 + \frac{1}{252} c_3 = \frac{1}{30}, \\ \frac{1}{252} c_1 + \frac{3}{1120} c_2 + \frac{1}{70} c_3 = \frac{1}{90}, \\ \frac{1}{252} c_1 + \frac{1}{70} c_2 + \frac{3}{1120} c_3 = \frac{1}{90}. \end{cases} \quad (1.12)$$

Решив систему (1.12), находим

$$c_1 = \frac{3031}{997} \approx 3,0401;$$

$$c_2 = c_3 = -\frac{56}{997} = -0,0562.$$

Подставляя найденные значения величин c_1 , c_2 , c_3 в формулу (1.11), получаем приближенное решение нашей задачи:

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 + xy(1 - x - y)[3,0401 - 0,0562(x + y)]. \quad (1.13)$$

2 Контрольные вопросы

1. Сформулируйте задачу Дирихле и запишите её вариационную (энергетическую) постановку.
2. Выведите функционал энергии, соответствующий уравнению Пуассона с граничными условиями Дирихле.
3. Объясните основную идею метода Ритца и его связь с задачей минимизации функционала.
4. Постройте приближённое решение методом Ритца в виде линейной комбинации базисных функций.
5. Получите систему алгебраических уравнений для коэффициентов разложения в методе Ритца.
6. Решите одномерную задачу Дирихле для уравнения $-u'' = f(x)$ на отрезке $[0, 1]$ методом Ритца, используя два базисных функции.
7. Исследуйте условия сходимости метода Ритца и приведите соответствующую теорему.
8. Сравните метод Ритца и метод Галёркина на примере задачи Дирихле.

3 Список литературы

Для получения дополнительных и более полных сведений студентам рекомендуется обратиться к литературе [1-3].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Коллатц Л., Численные методы решения дифференциальных уравнений, ИЛ, 1953, гл. III и IV.
- [2] Березкин И. А. и Жидков Н. П., Методы вычислений, т. 2, Физматгиз, 1959, гл. X.
- [3] Михлин С. Г., Вариационные методы в математической физике, Гостехиздат, 1957, гл. III.